un algorithme nœudien de reconnaissance des nombres premiers.

sommaire.

A – les nombres troués (abrégé)
A– extremum d'un entier et forme en 3 ou 3-forme
1– partages d'un entier et nappages
partage
nappage
2a – extremum
2b – répartition des entiers
3 – extremum et forme en 3 ou 3-forme
b– trous et nombres troués (aperçu)
B – les nombres premiers. le théorème principal
1- le théorème principal
2- distance arithmétique vs distance lacunaire.
ensembles lacunaires et relation lacunaire.
C – l'algorithme
références
annexes.
1 – codages lacunaires.
2 – considérations sur la somme arithmétique de gauss.
3 – petite incursion chez les jumeaux

A – les nombres troués. (abrégé)

a– extremum d'un entier et forme en 3 ou 3-forme.

1– partages d'un entier et nappages.

partage.

définition : un partage d'un entier n est une somme d'entiers dont le résultat donne la valeur de n. les éléments de cette addition sont appelés sommants; n est, par définition, partage et sommant de lui-même. il y a 2^{n-1} partages de n en considérant comme différents les partages de n ayant mêmes sommants dans un ordre différent (ce qu'on nomme "compositions" en anglais), par exemple $2 + 1 \neq 1 + 2$. j'appelle partition P_n de l'entier n l'ensemble de ses partages[1].

exemple : soit n = 4, il a donc $2^{4-1} = 2^3 = 8$ partages dont voici la liste P_4 : [4] = 4, [1,3] = 1 + 3, [3,1] = 3 + 1, [2,2] = [2^2] = 2 + 2, [1,1,2] = [1^2,2] = 1 + 1 + 2, [1,2,1] = 1 + 2 + 1, [2,1,1] =

[1] cf. *mon travail* dans la bibliographie.

$[2,1^2] = 2 + 1 + 1$ et $[1,1,1,1] = [1^4] = 1 + 1 + 1 + 1$. les puissances indiquent les occurrences des sommants.

nappage[2].

définition : la nappe d'un partage est le nombre obtenu en multipliant entre eux tous les sommants du partage ("product" en anglais). par définition, n est sa propre nappe.

pour un n donné, il y a donc autant de nappes que de partages, certaines pouvant être égales. exemple, les nappes de 4 sont : nap[4] = 4 (par définition), nap[1,3] = nap[3,1] = 1x3 = 3, nap[2^2] = 2x2 = 4, nap[1^2,2] = nap[1,2,1] = nap[2,1^2] = 1x1x2 = 2 et nap[1^4] = 1x1x1x1 = 1. les nappes font donc classes d'équivalence de toutes les permutations d'un même partage; pour cela, je les nomme classes nappées. (ces classes d'équivalences sont nommées "partitions" en anglais). (voir sur l'encyclopédie des suites d'entiers en ligne, oeis, la suite A000041).

en passant (puisque ce n'est pas le but de cet article) j'appelle couverture la somme de toutes les nappes de l'entier n et on a couv(n) = F_{2n}, nombres "pairs" de fibonacci. cf. réf. mon travail.[3]

un partage particulier est la somme de gauss[4] ∑n = 1 + 2 + 3 + 4 +…+ n car ses n sommants sont tous les entiers consécutifs de 1 à n; sa nappe s'écrit tout naturellement nap[∑n] = 1x2x3x…xn = n! cf. référence. mais cette nappe n'est pas l'extremum de ∑n, car il varie selon les classes des sommants qui composent cette somme. (0˜, 1˜, 2˜, voir ci-dessous 2a, et 2b – répartition des entiers).

2a – parmi toutes les nappes de l'entier n il en est au moins une dont la valeur est supérieure à toutes les autres. j'appelle cette valeur extremum de n que je note ex(n) (voir la suite A000792 sur oeis).

---

[2] idem.

[3] *à ne pas confondre avec le concept de même nom que jean leray a produit lors de sa détention par les nazis, ni avec la notion de couverture de test en mathématique médicale.*

[4] voir annexe : considérations sur la somme de gauss.

2b – répartition des entiers.

on peut répartir tous les entiers en trois classes, avec k parcourant l'ensemble ordonné des entiers ℕ, de 0 à n. (voir la suite A000792 sur oeis).

la classe $0^{\sim}$ des entiers n = 3k; ce sont les multiples de 3, y compris 0. cette classe ne possède qu'un seul nombre premier, 3 lui-même.
la classe $2^{\sim}$ des entiers n = 3k + 2; ce sont 2, 5, 8, 11, 14, etc…
la classe $1^{\sim}$ des entiers n = 3k + 1; ce sont 1, 4, 7, 10, 13, etc… ces deux classes se partagent la totalité des nombres premiers, hormis 3.

3 – extremum et forme en 3 ou 3-forme.
(pour des démonstrations voir notamment la suite A000792 sur oeis, tomislav došlić "maximum product over partitions…" 2005, janis iraids & al "integer complexi-ty…"., etc).
quel que soit l'entier n de classe $0^{\sim}$, son extremum provient du partage 3k et est de la forme ex(n) = 3x3x…x3 (k fois 3) = 3^k. tous les autres partages ont une nappe inférieure. par exemple soit n = 24. un partage est 24 = 3 + 3 +…+ 3 (8 fois 3) = 3 x 8, la 3-forme est ex(24) = 3^8 = 6561. si l'on considère le partage 24 = 2 + 2 +…+ 2 (12 fois 2) = 2 x 12, sa nappe est nap[2^{12}] = 2^{12} = 4096. si l'on prend le partage 24 = 6 x 4, la nappe égale 1246, avec 4x5^4 on obtient 2500, etc.

pour la classe $2^{\sim}$, un partage est [3^k,2] = 3 + 3 +… + 3 (k fois 3) + 2 dont la 3-forme est ex(3k+2) = 2x3^k. par exemple soit n = 47 = 3x15 + 2, sa 3-forme est ex(47) = 2x3^{15} = 28 697 814. aucune autre nappe de 47 ne surpasse cette valeur.

pour les entiers de la classe $1^{\sim}$, il faut effectuer une légère modification de leur 3-forme. le partage qui donne l'extremum devrait être p = 3 + 3 +…+ 3 (k fois 3) + 1 dont on tirerait l'extremum ex(n) = 1x3^k = 3^k. mais alors cet extremum serait celui de la classe $0^{\sim}$ ce qui ne se peut. on modifie alors ainsi le partage : parmi les k "3" du partage, on en écarte un que l'on ajoute au 1 pour obtenir finalement p' = 3 + 3 +…+3 (k-1 fois 3) + 4. l'extremum est ainsi donné par ex(3k+1) = ex(3(k-1)+4) = $4 \times 3^{k-1}$. si l'on effectue la différence entre $4 \times 3^{k-1}$ et 3^k, on obtient $4 \times 3^{k-1} - 3^k = 3^{k-1}(4-3) = 3^{k-1}$. je réserve la dénomination 3-forme à cet extremum modifié. exemples. 1) soit n = 7; un partage est $[1,3^2]$ = 1 + 3 + 3 dont la nappe est nap$[1,3^2]$ = 9 et dont la 3-forme modifiée est 4×3 = 12 qui est l'extremum de 7. la différence est bien de 12 – 9 = 3 = 3^{2-1}. 2) soit n = 34. un partage est $[3^{11},1] = 3 \times 11 + 1$, dont la nappe est $1 \times 3^{11} = 3^{11}$; or on a vu qu'il fallait modifier la 3-forme en 3^{11-1} + 4 ce qui donne l'extremum 4×3^{10} = 4x59 049 = 236 196. le gain est 236 196 – 3^{11} = 236 196 – 177 147 = 59 049 = 3^{10}. si l'on voulait utiliser d'autres 3 avec 4 on diminuerait le score. par exemple 10×3^8 = 65 610.

b– trous et nombres troués (aperçu).

définition : l'extension de l'entier n, notée n^+, est la suite de ses nappes consécutives, de valeur n+1 à son extremum ex(n). par exemple, 7^+ = {8, 9, 10, 11, 12}. la partie antérieure à n+1 est la suite naturelle s_n dont l'entier n est la borne supérieure, mais lui-même n'appartient pas à son extension, dont il pourrait être sa borne inférieure, nous verrons plus loin pourquoi.

de l'extension n^+ de l'entier n à celle de l'entier n+1, $(n+1)^+$, on a la récurrence des extrema, avec ex(n) > 1, c'est-à-dire n ≥ 2 :

$$\mathrm{ex}(n+1) = \mathrm{ex}(n) \times \begin{cases} 4/3 \text{ si ex}(n) \text{ est impair} \\ 3/2 \text{ sinon}^5. \end{cases}$$

qu'on peut écrire, à la manière d'eugène ehrhart

$$\mathrm{ex}(n+1) = \mathrm{ex}(n) \times [4/3; 3/2], \text{ avec } n \geq 2.$$

par exemple ex(7) = 12, 12 est pair donc ex(8) = $12 \times 3/2$ = 18. 18 est pair donc ex(9) = $18 \times 3/2$ = 27, 27 est impair donc ex(10) = $27 \times 4/3$ = 36, etc..

[5]petite remarque: 1 est le seul entier dont l'extremum ex(1) = 1 puisque $1 = 1 \times 3^0$, doit être multiplié par 2 pour fournir l'extremum suivant; or 2 = 4/3x3/2.

voici la liste des 6 premiers extrema :

ex(2) = 2 (c'est-à-dire 2×3^0), ex(3) = 2 x 3/2 = 3, ex(4) = 3 x 4/3 = 4, ex(5) = 4 x 3/2 = 6, ex(6) = 6 x 3/2 = 9 et ex(7) = 9 x 4/3 = 12, etc…

remarque : (a)- la récurrence commence à 2, mais la suite des entiers commençant à 1 se construit à partir d'une brique, le triplet (udz) tel que $u \in 1^{\sim}$, $d \in 2^{\sim}$ et $z \in 0^{\sim}$ et constitue le mot infini périodique $(udz)^{\infty}$.

(b)- il est aisé de constater que seules les extensions des multiples de 3, soient les z, sont impaires; en conséquence, à partir de 2, la série des coefficients fournit le produit périodique 3/2 x 3/2 x 4/3 = 3; ainsi ex(3(k+1)) = 3ex(3k), qui se réécrit ex(n+3)= 3ex(n). le même raisonnement s'applique, par translation, à u et d. ceci permet de construire de proche en proche la liste A000792.

j'appelle expansion de n, que je note X(n), l'union disjointe orientée, concaténation donc, de la suite naturelle de n s_n = {1,2,…,n} et de son extension n^+ : X(n) = $s_n \uplus n^+$ = {1,2,…,n, n+1,…,ex(n)}.

n^+ ne contient pas nécessairement, en tant que nappes, tous les entiers de n+1 à ex(n); ces nappes manquantes (issues de partages ultérieurs donc) dans l'extension de n sont ses trous. l'extension n^+ de n est, en conséquence, dite trouée mais on dira, par abus de langage sans risque d'erreur, l'entier n est troué.

les 5 premiers entiers ne sont pas troués, leurs expansions contiennent tous les entiers qui les précèdent plus eux-mêmes. on dit que leurs expansions X(n) se réduisent à leurs suites naturelles s_n. c'est avec l'entier 5 que commence la série infinie des extensions possédant des nappes supérieures à leur valeur (5 a un partage 2 + 3 dont la nappe est 2x3 = 6 qui est aussi son extremum) mais le premier nombre troué est 6; voyons cela.

6 a 32 partages, c'est-à-dire 32 nappes. son extremum est donné par 3^2 = 9 (puisque 6 = 3 + 3 = 3 x 2). si l'on étale toutes les

nappes de 6, on obtient la suite (en ne prenant qu'un représentant des nappes identiques) :

1 = nap[1^6], 2 = nap[1^4,2], 3 = nap[1^3,3], 4 = (nap [1^2,4] et nap[1^2,2^2]), 5 = nap[1,5], 6 = (nap [6] et nap[1,2,3]), 8 = (nap[2,4] et [2^3]) et enfin 9 = nap[3^2].

rappel : entre [ ] la somme est toujours égale à 6 et le produit des sommants donne les nappes, dont l'extremum est 9. le trou de 6 est en 7, il n'y a pas de nappe 7 dans l'extension de 6, ce qui sera étendu au chapitre suivant sur les nombres premiers. j'écris nap6_7 = Φ. autres exemples : nap7_{11}= Φ, l'extension de n = 8 possède quatre trous : $\Phi_8 = \{8_{11}, 8_{13}, 8_{14}, 8_{17}\}$, etc. j'appelle ensemble lacunaire de n, et je note n_Φ, l'ensemble des trous de n.

B – les nombres premiers. le théorème principal

1 – le théorème principal.

à partir de 6 tous les nombres sont troués. en utilisant le théorème fondamental de l'arithmétique il s'en déduit que tous les nombres premiers sont des trous des extensions[6] des nombres composés qui les précèdent. en effet, par définition et construction, les éléments des extensions des entiers sont des produits, c'est-à-dire le résultat de factorisations à quoi s'oppose la primarité sans factorisation.

remarque : un entier peut être un trou d'une extension, voire de plusieurs, sans être pour autant premier comme nous l'avions vu pour 8_{14}; par exemple 22 est un trou de 10 (10_{22} = Φ), de 11 (11_{22} = Φ) et de 12 (12_{22} = Φ) car 22 = 2x11, et il n'y a pas de partage 2 + 11 avant 13, mais à partir de 13, l'entier 22 est nappe de tous les entiers ≥13. par exemple un partage de 14 est [1,2,11(onze)] = 1 + 2 + 11, un partage de 21 est [1^8,2,11] = 1^8 + 2 + 11, etc.

on peut, maintenant, énoncer le théorème :

[6] c'est la raison fondamentale pour laquelle ***n*** ne peut être élément (le plus petit) de son extension.

théorème principal : un nombre est premier s'il n'apparaît dans aucune extension des entiers qui le précèdent.

ainsi est résolu le mystère des nombres premiers

en conséquence, et tenant compte de la remarque ci-dessus, soit p un nombre premier ≥ 11 (parce que 7 est trop petit pour que son extension 7^+ contienne un multiple puisque ex(7) = 12 et que le premier multiple de 7 est 14), alors tous les premiers kp, k ≥ 2, inclus dans p^+, sont inclus dans son ensemble lacunaire p_Φ constitué de tous ses trous; par exemple 11_Φ = {13, 17, 19, 22, 23, 26, 29, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53}. (en bleu, les non premiers).

attention! ne pas confondre p_Φ ensemble lacunaire c'est-à-dire ensemble des trous de l'extension p^+ de p, d'avec Φ_p ensemble des extensions dont p est trou {n_1, n_2,…p-1}; on peut d'ailleurs considérer ces deux ensembles duaux.

2 – distance arithmétique vs distance lacunaire.

du théorème principal on tire la conséquence suivante. soit n le plus petit nombre dont l'extension n^+ contient l'entier a, c'est-à-dire que ex(n) > a > n, ou, de façon équivalente a ∊ n^+. deux cas bien distincts se présentent :

1°) soit a est une nappe de n, c'est-à-dire un partage de n;
2°) soit a est un trou dans n. si c'est le cas, deux possibilités,
– soit (α) a est premier, et je conserve sa notation,
– soit (β) il ne l'est pas et je le note $\not a$ (a barré).

du fait du théorème principal, les entiers entrent dans des extensions d'autres entiers plus petits qu'eux dont ils sont nappes ou non. soient donc deux de ces entiers a et n, a > n; j'appelle distance lacunaire la différence entre les valeurs de a et de n, et je note $d_{a,n} = a – n$.

distance vraie vs distance apparente.

lorsqu'un nombre a est nappe d'une extension n^+, c'est-à-dire n < a, c'est qu'il n'est pas premier, sa distance lacunaire est apparente et réduite à 0, ou distance lacunaire nulle; c'est la différence entre le nombre n pour lequel a n'est pas un trou et n lui-même que je note $\cancel{d}_{a,n} = \cancel{d}_{n,n} = 0$; le d barré indiquant l'apparence. $d_{n,n}$ signifie que la distance de n à son extension est nulle et $\cancel{d}_{n,n}$ est la distance nulle d'une nappe de n à cette même extension; c'est ainsi pour toutes les n^+ qui contiennent a. c'est le cas du 2° ci-dessous pour le couple[7] (9,10).

si $\cancel{a}$, sans être premier, est un trou de n, c'est qu'il apparaîtra en tant que nappe dans une extension ultérieure d'un nombre m > n (dont il sera un partage) m^+, mais inférieure à $\cancel{a}^+$ car m < ex($\cancel{a}$) par application du théorème principal qui interdit à un entier non premier d'apparaître la 1ère fois à son rang. j'écris $\cancel{a} \notin \cancel{a}^+$. la distance lacunaire devient alors $d_{\cancel{a},n} = \cancel{d}_{m,n} = m - n < \cancel{a} - n$, distance lacunaire réduite de $\cancel{a}$. c'est le cas 3°, le couple (9,22).

enfin, lorsque a est premier, sa distance lacunaire est égale à la distance arithmétique $d_{a,n} = a - n$. aussi je nomme distance vraie $d_{a,n}$ cette distance (cas 1° couple (7,11)) et distance réduite $d_{\cancel{a},n}$ relativement aux extensions qui les contiennent, les deux autres.

voyons cela sur quelques exemples.

1°) m = 11 et n = 7. on a $7_{11} = \Phi$; nous avons $d_{11,7} = 11 - 7 = 4$.

2°) m = 10 et n = 9. 9_{10} est une nappe et $d_{\cancel{10},9} = 10 - 9 = \cancel{1}$ réduite à 0, est la distance nulle $\cancel{d}_{9,9} = 0$, soit une contraction de 1.

3°) m = 22 et n = 9. or 22 = 2 x 11 = nap[2,11] = nap[2 + 11] = nap[13]; donc $9_{\cancel{22}} = \Phi$; on a $d_{\cancel{22},9} = \cancel{22} - 9 = \cancel{13}$, distance apparente, et, distance réduite $\cancel{d}_{13,9} = 13 - 9 = 4$, contraction de 9.

ce qui précède permet d'écrire ce qui suit :

<u>ensembles lacunaires et relation lacunaire.</u>

---

[7] (***n***;***m***) est une paire orientée différente de (***m***;***n***): le 1er couple se lit $\boldsymbol{m \in n^+}$, le second $\boldsymbol{n \in m^+}$.

une extension d'un entier n est constituée de l'union disjointe orientée de deux sous-ensembles entremêlés, celui de ses nappes N_n et celui de ses trous n_Φ, $n^+ = N_n$ ₪ n_Φ. je nomme intrication, "₪", un tel entremêlement ordonné.

a) vus côté extensions :exemples d'ensembles lacunaires n_Φ : $7_\Phi = \{11\}$, $8_\Phi = \{11, 13, 14, 17\}$, $9_\Phi = \{11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26\}$, etc.

b) vus côté trous : transversalement, à chaque trou est attaché l'ensemble des entiers dont il est trou, ensemble troué de a; $\Phi_a = \{n_1, n_2,..., a-1\}$.

1- si le nombre est premier, le cardinal de cet ensemble, $|\Phi_a|$, égale la distance vraie;
2- sinon, alors comme on l'a vu, le cardinal de cet ensemble égale la distance réduite, éventuellement égale à 0.

nous en déduisons les relations lacunaires :
pour les nombres premiers la relation lacunaire est la distance vraie, $d_{p,n} = p - n = |\Phi_p|$. qui s'écrit par permutation, $p - |\Phi_p| = n$. ce qui s'énonce : tout entier $n \geq 6$ (premier entier troué) est égal à la différence de la valeur de chacun de ses trous premiers d'avec le cardinal de l'ensemble troué contenant toutes les extensions dont ce nombre premier est trou.
pour les non-premiers la relation se dédouble selon que
(a) le non-premier a est nappe de la plus petite extension par laquelle il apparait en premier, et on a $a - n = n - n = 0$, ou
(b) qu'il est trou d'un entier n et donc nappe d'une extension ultérieure m^+, $m > n$, c'est-à-dire encore $\not{a} \in n^+$ ET $\not{a} \not\in \not{a}^+$, on a $\cancel{d}_{\not{a},n} = \cancel{d}_{m,n} < d_{\not{a},n}$.
soit le couple (n, m) alors la relation $m \in n^+ \Rightarrow n \in s_m$. la réciproque n'est vraie que si m n'outrepasse pas ex(n). car tous les n appartiennent à l'infinité des suites naturelles et par conséquent à l'infinité des extensions.
l'entier n est le plus petit dont l'extension soit la première (plus petite) à faire apparaître le nombre premier p; en conséquence p doit "parcourir" toutes les extensions de n^+ à $(p-1)^+$ pour re-

joindre son extension p^+ dans laquelle il n'est plus trou; soit la distance vraie qui sépare n de p. cette distance (cardinal) $|\Phi_p|$, de l'ensemble troué Φ_p est orientée, contrairement à la distance arithmétique, et diminue de n – p à 0; je nomme donc gradient de p, et je note $\text{grad}^{\rightarrow}p = \Phi_p{}^{\rightarrow}$ les valeurs de $\text{grad}^{\rightarrow}p$ qui parcourent la fonction bâton $\text{grad}^{\rightarrow}p = -(x - p)$, x de n à p, possédant exactement $\text{grad}^{\rightarrow}p + 1$ éléments.

C – <u>l'algorithme</u>.

structure et énoncé de l'algorithme.

a) à partir de n = 6, on constitue sous forme de liste une base de données nappes (bdn) et
b) on regarde si l'entier impair choisi appartient à la liste. si oui il n'est pas premier sinon il l'est.

1 – on déploie tous les partages de n;
2 – on projette sur la liste ℓ toutes les nappes sans doublons (cas où deux nappes ont même valeur);
3 – on établit la liste n_Φ des trous de n (par mémoïsation par ex);
4 – au fur et à mesure des extensions, on efface les trous comblés (14, 21, 22, 25, 26, 28, 33, 34, 35, 38, 39, 42, 44, 46, 49, 50, 51, 52, 55, 56, …,91, 121, 133, etc.); on omet évidemment les nombres pairs et on utiluise d'emblée tous les filtres les plus simples.
5 – si l'entier impair n'apparaît qu'à son rang, il est premier.

annexes.

codages lacunaires.

un entier n peut être codé par la suite ordonnée de ses nappes et trous selon leurs distances relatives à n.

exemples : de n = 1 à n = 9.

de 1 à 5, #n = {0}.
#6 = {1}
#7 = {4}
#8 = {3,5,1,9}
#9 = {2,2,8,10,1,4,14,1,6}, etc…

1 – <u>considérations sur la somme arithmétique de gauss</u> $g_n = \Sigma n$

a – considérations arithmétiques.

a-1) le découplage.

g_n est la suite des nombres triangulaires, cas particuliers des nombres polygonaux, tels que $g_n = n(n+1)/2$. (suite A000217 de l'oeis).

en voici les 20 premiers termes :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210

conformément à la réflexion d'eugène ehrhart sur la surprise d'euler qu'une suite d'entiers (les dits "nombres d'euler") prenne ses valeurs dans deux suites différentes, c'est ce qu'il advient à la somme arithmétique de gauss.
réécrivons cette suite en deux harmoniques principales, la suite modulaire 1~ dont nous n'utilisons que l'élément $u_1 = 1$ et la suite modulaire 0~, ou indifféremment z[8]. g_n se découple en $(u_1z)^\infty$.

suite u :1 10 28 55 91 136 190
suite z : 3 6 15 21 36 45 66 78 105 120 153 171 210

à la liste A001318 de l'oeis, on peut lire :

```
"Conway's relation twixt the triangular and pentagonal
 numbers: Divide the triangular numbers by 3 (when you
 can exactly):
0 1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 66 78 91 105 120 136 153 …
0 - 1 2 .- .5 .7 .- 12 15 .- 22 26 .- .35 .40 .- ..51 …
....-.-.....+..+....-..-.....+..+.....-...-......+....
"and you get the pentagonal numbers in pairs, one of
 positive rank and the other negative.
"Append signs according as the pair have the same (+) or
 opposite (-) parity.
"Then Euler's pentagonal number theorem is easy to re-
 member:
"p(n-0)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7)-p(n-12)-p(n-15)++--
 =0^n
```

---

[8] cf. plus haut, *répartition des entiers*, p2.

```
where p(n) is the partition function, the left side ter-
  minates before the argument becomes negative and 0^n =
  1 if n = 0 and = 0 if n > 0.
"E.g. p(0)=1, p(7)=p(7-1)+p(7-2)-p(7-5)-p(7-7)+0^7=11+7-
  2-1+0=15."
```

observons la progression de la suite u :

$1 = 1 + 0 = 1 + 9 \times 0$
$10 = 1 + 9 = 1 + 9 \times 1$
$28 = 1 + 27 = 1 + 9 \times 3$
$55 = 1 + 54 = 1 + 9 \times 6$
$91 = 1 + 90 = 1 + 9 \times 10$
$136 = 1 + 135 = 1 + 9 \times 15$
$190 = 1 + 189 = 1 + 9 \times 21$ etc…

alors, soit u_i le i-ème élément de u; et soit n_k le k-ième élément de la suite générale g_n, la suite de gauss est composée des deux suites intriquées l'une dans l'autre telles que nous avons $u_i = 1 + 9n_{k=i-1}$, avec $n_k = 0$ si $k = 0$, et $i = 1$ à ∞, qui est la formule (découplée) des nombres ennéagonaux (dans laquelle les u et les n sont indifférenciés). par exemple $u_6 = 1 + 9 \times n_5 = 1 + 9 \times 15 = 136$. la différence entre deux éléments consécutifs de la suite u est $u_{i+1} - u_i = 9(n_i - n_{i-1})$. par exemple $u_5 - u_4 = 91 - 55 = 9(10 - 6) = 36$.
des équations précédentes nous tirons la relation

$$u_i - 9(n_i - i) - 1 = 0.$$

par exemple $u_6 - 9(n_6 - 6) - 1 = 136 - 9(21 - 6) - 1$, etc.
cette équation correspond au rapport invariant $(u_i - 1)/(n_i - i) = 9$.
par ex. $(u_6 - 1)/(n_6 - 6) = (136 - 1)/(21 - 6) = 135/15$, etc
mais aussi, en utilisant l'itération sur i on peut écrire :

$$(u_{i+1} - u_i)/(n_i - n_{i-1}) = 9.$$

a-2) les carrés impairs.

revenons à l'équation $u_i = 1 + 9n_{i-1}$ et observons les différences entre éléments des paires $\{u_i, n_{i-1}\}$, $\Delta = u_i - n_{i-1}$:

$\{u_i, n_{i-1}\}$	{1, 0}	{10, 1}	{28, 3}	{55, 6}	{91, 10}	{136, 15}	{190, 21}
$\Delta = k^2$	1	9	25	49	81	121	169
k = u-ème + n-ème	1	3	5	7	9	11	13
($u_{\text{-ème}}$, $n_{\text{-ème}}$)	{1, 0}	{2, 1}	{3, 2}	{4, 3}	{5, 4}	{6, 5}	{7,6}

à chaque paire $\{u_i, n_{i-1}\}$ lui correspond sa paire des rangs respectifs des éléments, {i, i – 1}; la somme de ces rangs, $k = 2i - 1$, fournit l'entier k, dont la différence $\Delta = u_i - n_{i-1} = (2i - 1)^2 = k^2$.

a-3) l'intrication.

la suite u = (1,10,28,55,91,136,190,…) est la suiteA060544 de l'oeis, et la suite z = (3,6,15,21,36,45…) est la suite A117748 des nombres triangulaires divisibles par 3. on peut donc écrire (l'opérateur d'intrication '₪' se lit 'shekel') : A000217 = A060544 ₪ A117748. la suite A117748 elle-même susceptible de découplage. en voici les 15 premiers termes divisés par 3 et réécrits modulo nos 3 classes $u^{\sim} = \{1,4,7\}$, $d^{\sim} = \{2,5,8\}$ et $z^{\sim} = \{0,3,6\}$.

suite z :	3	6	15	21	36	45	66	78	//	105	120	153	171	210	231	276
" u	1			7			4		//		4			7		
" d		2	5					8	//	8					5	2
" z					3	6			//			6	3			

on peut donc réécrire :

A000217 = A060544 ₪ A117748 = A060544 ₪ [(udd)(uzz)], etc.

la somme arithmétique de gauss possède donc (entre autres) des propriétés fractales périodiques que cette manière fait apparaître.

mais continuons nos dérivations sur le même thème. en ayant divisé la ligne 2 de conway, on a fait apparaître 3 autres lignes u, d et z. ces trois lignes font surgir des symétries et translations incluses dans la structure de g_n. une première approche est indiquée par les // dans la première monstration ci-dessus du découplage. allons plus loin en décomposant la procédure :

les 13 premiers termes donnent, avec nos conventions :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
g_n	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91
u			1				7					4		
d				2		5							8	
z	0								3	6				

l'image graphique en est

```
                |
        |       |
        |   |   |
      | |   |   |
      | |   | | |
      | | | | | |
    | | | | | | |
0 | | | | | | | |
```

cette première césure donne la séquence C. de 14 à 26 nous avons la séquence C^-. et, de nouveau, à partir de 27 jusqu'à 53, la suite CC^- se reproduit à l'identique.
en voici l'illustration graphique.

```
                | |                               | |
        |       | |       |                 |       | |       |
        |   |   | |   |   |                 |   |   | |   |   |
      | |   |   | |   |   | |             | |   |   | |   |   | |
      | |   | | | | | |   | |             | |   | | | | | |   | |
      | | | | | | | | | | | |             | | | | | | | | | | | |
    | | | | | | | | | | | | | |         | | | | | | | | | | | | | |
0 | | | | | | | | | | | | | | | | 0 0 | | | | | | | | | | | | | | | | 0
```

a-4) réinterprétation modulaire de g_n.

comme indiqué par la remarque (a) p.4 ci-dessus, la suite naturelle des entiers s'écrit comme une suite modulo 9 de briques (udz). appliquons cette réflexion sur la formule $\Sigma n = n(n+1)/2$. nous obtenons ainsi une série infinie $u_i d_i z_i$ constituée des entiers consécutifs, telle que $u_i \in u = \{1,4,7,10,13, etc.\}$, $d_i \in d = \{2,5,8,11,14,17, etc\}$ et $z_i \in z = \{3,6,9,12,15,18, etc.\}$:

$u_i(u_i+1)/2$ $d_i(d_i+1)/2$ $z_i(z_i+1)/2$ $u_{i+1}(u_{i+1}+1)/2$, etc, soit explicitement :

$u_1(u_1+1)/2 = (1.2)/2 = 1$	$d_1(d_1+1)/2 = (2.3)/2 = 3$	$z_1(z_1+1)/2 = (3.4)/2 = 6$
$u_2(u_2+1)/2 = (4.5)/2 = 10$	$d_2(d_2+1)/2 = (5.6)/2 = 15$	$z_2(z_2+1)/2 = (6.7)/2 = 21$
$u_3(u_3+1)/2 = (7.8)/2 = 28$	$d_3(d_3+1)/2 = (8.9)/2 = 36$	$z_3(z_3+1)/2 = (9.10)/2 = 45$
$u_4(u_4+1)/2 = (10.11)/2 = 55$	$d_4(d_4+1)/2 = (11.12)/2 = 66$	$z_4(z_4+1)/2 = (12.13)/2 = 78$

et par similitude avec les quaternions j'écris circulairement : $d_i = u_i + 1$, $z_i = d_i + 1$ et $u_{i+1} = z_i + 1$, avec les relations "géométriques" suivantes : $u_i x d_i/2 = u_j$, $d_i x z_i/2 = d_j$ et $z_i x u_{i+1}/2 = z_j$.

b – les extrema successifs de la suite.

reprenons les 10 premiers éléments de la suite g_n. la suite des extrema et des partages correspondants est :

1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
1	3	9	36	243	2187	26244	531 441	14 348 907	516 560 652
1	3	3+3	3+3+4	3x5	3x7	3x8+4	3x12	3x15	3x17+4

2 – petite incursion chez les jumeaux.

les nombres premiers dits "jumeaux" sont consécutifs et séparés d'une unité l'un de l'autre. 3 et 5, 5 et 7, 11 et 13, 17 et 19, par exemple sont de tels jumeaux. ils forment ainsi toujours un couple ($p_{inférieur}$, $p_{supérieur}$) tels que $p_{sup} = p_{inf} + 2$.

en termes de classes modulaires vues plus haut, ces jumeaux sont toujours de la forme ($2^{\sim}$, $1^{\sim}$), ce qui s'écrit en termes d'extrema : $(p_{inf}, p_{sup}) = (2.3^k, 4.3^k)$; où on observe que la puissance de 3 est la même pour les deux nombres, et que la différence $p_{sup} - p_{inf} = 2$ s'exprime par leurs extrema dans un rapport 2. par exemple le couple (41, 43) s'écrit $(2.3^{13}, 4.3^{13})$; en effet $41 = 3 \times 13 + 2$ et $43 = 3 \times 13 + 4$ et on a bien ex(43) = 2.ex(41).

avec la remarque (b), p.6, on peut écrire :

$ex(p_{sup}) = ex(p_{inf} + 2) = 3.ex(p_{inf} – 1)$, et inversement $ex(p_{inf}) = ex(p_{sup} + 1)/3$. la séquence locale des nombres premiers jumeaux s'écrit donc toujours, avec la remarque (a), p.6 :

$$\ldots 1^{\sim} -- p_{inf} \in 2^{\sim} -- 3k -- p_{sup} \in 1^{\sim} - 2^{\sim} \ldots.$$

références

la littérature est infinie. voici quelques suggestions :

mon travail : partitions nœudiennes d'entiers, 80p, format A4, non publié.

oeis sur internet; les suites A000041, A000792, A060544, A000217, A117748, notamment. chacune sur le site ouvre à une multitude de travaux afférents.

sylvie heubach et toufik mansour combinatorics of compositions and words, coll. discrete mathematics and its applications, 2010, chap.3 compositions, def.3.21.

eugène ehrhart les entiers d'euler, 10p, Strasbourg, 1979.

tomislav došlić "maximum product over partitions into distinct parts", 5p, journ. of int seq, vol. 8, 2005.

janis iraids & al. "integer complexity : experimental and analytical results", 26p, post 2012, univ. of latvia.

a. k. agalvar…euler's identity… et partitions theory….etc.